УДК 517.911, 517.968

ПОЛУНЕПРЕРЫВНАЯ СНИЗУ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ [1]

© А. И. Булгаков, Е. В. Корчагина, О. В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия.

Аннотация: Сформулирована теорема о полунепрерывной снизу зависимости множеств решений задачи Коши от правой части функционально-дифференциальных включений, импульсных воздействий и начальных условий.

Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : U \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$, $h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\cdot,\cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами пространства $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$.

Множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (разложимых) подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$ обозначим через $S(\mathbf{L}^n[a,b])$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$; $R_+^1 = [0,\infty)$; $\mathbf{L}_+^1[a,b]$, $\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$ – конусы неотрицательных функций пространств $\mathbf{L}^1[a,b]$ и $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$ соответственно; $\chi(a,b)$ – характеристическая функция интервала (a,b).

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi_0(x), \tag{1_0}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_{0k}(x(t_k)),\ k = 1,2,\ldots,m, \tag{2_0}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3_0}$$

а также для любого $i = 1,2,...$ рассмотрим задачи

$$\dot{x} \in \Phi_i(x), \tag{1_i}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_{ik}(x(t_k)),\ k = 1,2,\ldots,m, \tag{2_i}$$

$$x(a) = x_i, \tag{3_i}$$

где для каждого $i = 0,1,...$ вольтерров по А.Н. Тихонову оператор $\Phi_i : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi_i(U)$ ограничен суммируемой функцией. Для каждого $i = 0,1,...$, $k = 1,2,...m$ отображения $I_{ik} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны.

Пусть $H(x_i,\tau)$ $(i = 0,1,...)$ – множество решений задачи $(1_i)-(3_i)$ на отрезке $[a,\tau]$ $\quad(\tau \in (a,\tau])$.

Будем говорить, что задачи $(1_i) - (3_i)$ $(i = 0,1,2,...)$ априорно ограничены в совокупности, если найдется такое число $l > 0$, что для любых фиксированных $i = 0,1,...$, $\tau \in (a,b]$, и любого $y \in H(x_i,\tau)$ выполняется оценка $||y||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} \leqslant l$.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 07-01-00305, 09-01-97503), научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы"(РНП № 2.1.1/1131) и включена в Темплан № 1.6.07.

О п р е д е л е н и е 1. *Будем говорить, что импульсные воздействия* $I_{ik} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ...,$ $k = 1, 2, ..., m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если для каждого $i = 1, 2, ...,$ $k = 1, 2, ..., m$ найдется непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_{ik} : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}_{ik}(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_{0k}(x) - I_{ik}(y)| \leqslant \widetilde{I}_{ik}(|x - y|), \tag{4}$$

причем для любого $k = 1, 2, ..., m$ и любого $z \in \mathbb{R}^1_+$ имеем $\widetilde{I}_{ik}(z) \to 0$ при $i \to \infty$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_{ik} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ...,$ $k = 1, 2, ..., m$, и отображения $\Phi_i : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}^n_1[a, b])$, $i = 1, 2, ...,$ *обладают свойством* $\mathcal{B}$, если импульсные воздействия $I_{ik} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ...,$ $k = 1, 2, ..., m$, обладают свойством $\mathcal{A}$, и если для каждого $i = 1, 2, ...$ найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma_i : \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a, b] \to \mathbf{L}^1_+[a, b]$, удовлетворяющий условиям: $\Gamma_i(0) = 0$, для любых функций $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi_0(x); \Phi_i(y)] \leqslant \|\Gamma_i(Z(x - y))\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})},$$

причем для любого $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a, b]$ $\Gamma_i(z) \to 0$ при $i \to \infty$, и задачи

$$\dot{y} = \Gamma_i(y), \quad \Delta y(t_k) = \widetilde{I}_{ik}(y(t_k)), \quad k = 1, 2, ..., m, \quad y(a) = |x_0 - x_i|, \quad i = 1, 2, \ldots$$

априорно ограничены в совокупности, где отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a, b]$ определено равенством $(Zx)(t) = |x(t)|$.

Т е о р е м а. Пусть последовательность $x_i \to x_0$ в $\mathbb{R}^n$, при $i \to \infty$. И пусть задачи $(1_i) - (3_i)$, $i = 0, 1, \ldots$ априорно ограничены в совокупности. Далее пусть импульсные воздействия $I_{ik} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots, m$, и отображения $\Phi_i : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}^n[a, b])$, $i = 1, 2, \ldots,$ обладают свойством $\mathcal{B}$. Тогда для каждого решения $y \in H(x_0, b)$, для любого $t \in [a, b]$ представимого в виде

$$y(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k, b]} \Delta(y(t_k)),$$

где $q \in \Phi_0(y)$ и $\Delta(y(t_k))$ $(k = 1, 2, ..., m)$ удовлетворяют равенствам (2_0), найдется такая последовательность $y_i \in H(x_i, b)$, $i = 1, 2, \ldots,$ что для любого $t \in [a, b]$ выполняется равенство

$$y_i(t) = x_0 + \int\limits_a^t q_i(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k, b]} \Delta(y_i(t_k)),$$

где $q_i \in \Phi_i(y_i)$ и $\Delta(y_i(t_k))$ $(k = 1, 2, ..., m)$ удовлетворяют условиям (2_i), и $y_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$, при этом $q_i \to q$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$ при $i \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

2. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

4. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // УМН. 1949. Т. 4. Вып. 5. С. 99–141.

5. *Филиппов А.Ф.* Диференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Abstract: There is derived the theorem on lover semicontinuous dependence of solution-set to the cauchy problem on the right-hand side of functional-differential inclusion, on the impulses and on the initial conditions.

Keywords: functional-differential inclusion; impulses.

Булгаков Александр Иванович
д. ф.-м. н., профессор
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Alexandr Bulgakov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Корчагина Елена Валерьевна
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Elena Korchagina
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Филиппова Ольга Викторовна
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Olga Filippova
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.911.5

СВЯЗНОСТЬ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВОЛЬТЕРРОВЫМ ОПЕРАТОРОМ И ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ [1]

© А. И. Булгаков, J. P. Munembe

Ключевые слова: связность множества решений; функционально-дифференциальные уравнения с вольтерровым оператором и импульсными воздействиями.

Аннотация: Здесь приводится теорема о структуре множества решений уравнения в метрическом пространстве, с помощью которой формулируется теорема о связности множества решений задачи Коши функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями.

Вопрос о связности множеств решений задач эволюционного типа имеет богатую историю и восходит к классическим работам А. Кнезера, М. Хукухаре, где он был решен для обыкновенных

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 07-01-00305, 09-01-97503), научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы"(РНП № 2.1.1/1131), "Программой Всемирного исследовательского сотрудничества в математике, статистике и информатике"при поддержке SIDA и включена в Темплан № 1.6.07.